

Correction des exercices

Correction de l'exercice 6.1

Notons x le nombre de mâles et y le nombre de femelles en début d'expérience. D'après les informations fournies, ces nombres (entiers) vérifient le système :

$$\begin{cases} x + y &= 100 \\ 2x + 3y &= 284 \end{cases}$$

On obtient $x = 16$ puis $y = 84$. Il y avait donc au départ 16 mâles gris et 84 femelles blanches.

Correction de l'exercice 6.2

Soient $X = (x, y, z)$ le vecteur des poids respectifs de MTH, ANG et INF. On a le système d'équations

$$\begin{cases} 7x + 12y + 6z &= 8 \\ 11x + 6y + 10z &= 9 \\ 11x + 16y + 14z &= 14 \end{cases}$$

dont la solution est $X = (0.2, 0.3, 0.5)$. En effet, la matrice du système

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 12 & 6 \\ 11 & 6 & 10 \\ 11 & 16 & 14 \end{pmatrix}$$

a pour déterminant $\det(A) = -400$ donc le système est de Cramer.

— Par la méthode d'inversion matricielle, on trouve

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{400} \begin{pmatrix} -76 & -72 & 84 \\ -44 & 32 & -4 \\ 110 & 20 & -90 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

— Par la méthode de Cramer :

$$x = -\frac{1}{400} \begin{vmatrix} 8 & 12 & 6 \\ 9 & 6 & 10 \\ 14 & 16 & 14 \end{vmatrix}, \quad y = -\frac{1}{400} \begin{vmatrix} 7 & 8 & 6 \\ 11 & 9 & 10 \\ 11 & 14 & 14 \end{vmatrix}, \quad z = -\frac{1}{400} \begin{vmatrix} 7 & 12 & 8 \\ 11 & 6 & 9 \\ 11 & 16 & 14 \end{vmatrix}$$

soit encore

$$x = \frac{-80}{-400} = 0.2, \quad y = \frac{-120}{-400} = 0.3, \quad z = \frac{-200}{-400} = 0.5$$

Correction de l'exercice 6.3

Soient a , b et c les quantités en grammes des produits A, B, C. On a :

$$\begin{cases} 0.4a + 0.1b + 0.3c &= 295 \\ 0.2a + 0.1c &= 110 \\ 0.3a + 0.5b + 0.4c &= 390 \end{cases}$$

soit encore, en multipliant par 10,

$$\begin{cases} 4a + b + 3c &= 2950 \\ 2a + c &= 1100 \\ 3a + 5b + 4c &= 3900 \end{cases}$$

La matrice du système est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

On a $\det(A) = 5$ donc ce système admet une unique solution

$$(a, b, c) = (250, 150, 600).$$

Correction de l'exercice 6.4

Soient x_1 , x_2 et x_3 les quantités respectives des aliments 1, 2 et 3. On a :

$$\begin{cases} 200x_1 + 400x_2 + 300x_3 &= 2400 \\ 300x_1 + 500x_2 + 400x_3 &= 3500 \\ 40x_1 + 50x_2 + 20x_3 &= 300 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 25 \end{cases}$$

soit encore, en simplifiant les lignes L_1 et L_2 par 100 et L_3 par 10,

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 24 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 35 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 30 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 25 \end{cases}$$

Le système a 4 équations et 3 inconnues donc on ne peut utiliser ni la méthode d'inversion matricielle ni celle de Cramer. On utilise la méthode de Gauss.

- On élimine x_1 dans les lignes 2, 3 et 4 en faisant $L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ et $L_4 \leftarrow 2L_4 - 5L_1$:

$$\begin{cases} 2x_1 & +4x_2 & +3x_3 & = & 24 \\ & -2x_2 & -x_3 & = & -2 \\ & -3x_2 & -4x_3 & = & -18 \\ & -14x_2 & -11x_3 & = & -70 \end{cases}$$

soit encore

$$\begin{cases} 2x_1 & +4x_2 & +3x_3 & = & 24 \\ & 2x_2 & +x_3 & = & 2 \\ & 3x_2 & +4x_3 & = & 18 \\ & 14x_2 & +11x_3 & = & 70 \end{cases}$$

- On élimine x_2 dans les lignes 3 et 4 en faisant $L_3 \leftarrow 2L_3 - 3L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4 - 7L_2$:

$$\begin{cases} 2x_1 & +4x_2 & +3x_3 & = & 24 \\ & 2x_2 & +x_3 & = & 2 \\ & & +5x_3 & = & 30 \\ & & +4x_3 & = & 56 \end{cases}$$

Les deux dernières lignes sont en contradiction car L_3 donne $x_3 = 6$ et L_4 donne $x_3 = 14$. Le système n'admet donc pas de solution.

Correction de l'exercice 6.5

En considérant le nombre de molécules de part et d'autre, on déduit le système

$$\begin{cases} x & = & z \\ x & = & t \\ 4x & = & u \\ y & = & 2u \\ y & = & z + 2t + 2v \end{cases}$$

qu'on peut résoudre par substitution puisqu'il est creux. La solution est de la forme

$$(x, y, z, t, u, v) = (x, 8x, x, x, 4x, \frac{5}{2}x).$$

Ce système a une infinité de solutions. On peut par exemple prendre $x = 2$ et trouver



Correction de l'exercice 6.6

Le vecteur d'équilibre $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)^T$ est tel que

$$P\pi = \pi \quad \text{et} \quad \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1.$$

On a

$$\begin{aligned} P\pi = \pi &\implies \begin{pmatrix} 0 & 0.25 & 0.25 \\ 0.5 & 0.5 & 0.25 \\ 0.5 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} \\ &\implies \begin{pmatrix} 0.25\pi_2 + 0.25\pi_3 \\ 0.5\pi_1 + 0.5\pi_2 + 0.25\pi_3 \\ 0.5\pi_1 + 0.25\pi_2 + 0.5\pi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} \\ &\implies \begin{cases} -\pi_1 + 0.25\pi_2 + 0.25\pi_3 = 0 \\ 0.5\pi_1 - 0.5\pi_2 + 0.25\pi_3 = 0 \\ 0.5\pi_1 + 0.25\pi_2 - 0.5\pi_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

En prenant en compte la condition $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$, on tire $\pi_3 = 1 - \pi_1 - \pi_2$ d'où le système devient

$$\begin{cases} -\pi_1 + 0.25\pi_2 + 0.25(1 - \pi_1 - \pi_2) = 0 \\ 0.5\pi_1 - 0.5\pi_2 + 0.25(1 - \pi_1 - \pi_2) = 0 \\ 0.5\pi_1 + 0.25\pi_2 - 0.5(1 - \pi_1 - \pi_2) = 0 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} -1.25\pi_1 &= -0.25 \\ 0.25\pi_1 - 0.75\pi_2 &= -0.25 \\ \pi_1 + 0.75\pi_2 &= 0.5 \end{cases}$$

De la première équation, on tire $\pi_1 = 0.2$. En remplaçant dans la seconde et dans la troisième, on tire

$$\begin{cases} 0.05 - 0.75\pi_2 &= -0.25 \\ 0.2 + 0.75\pi_2 &= 0.5 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} 0.75\pi_2 &= 0.3 \\ 0.75\pi_2 &= 0.3 \end{cases}$$

soit encore $\pi_2 = 0.4$. On a $\pi_3 = 1 - \pi_1 - \pi_2 = 0.4$. Le vecteur d'équilibre est donc

$$\pi = (0.2, 0.4, 0.4)^T.$$